8.2、 二重积分的计算

一、 利用直角坐标系计算二重积分

二、 利用极坐标计算二重积分

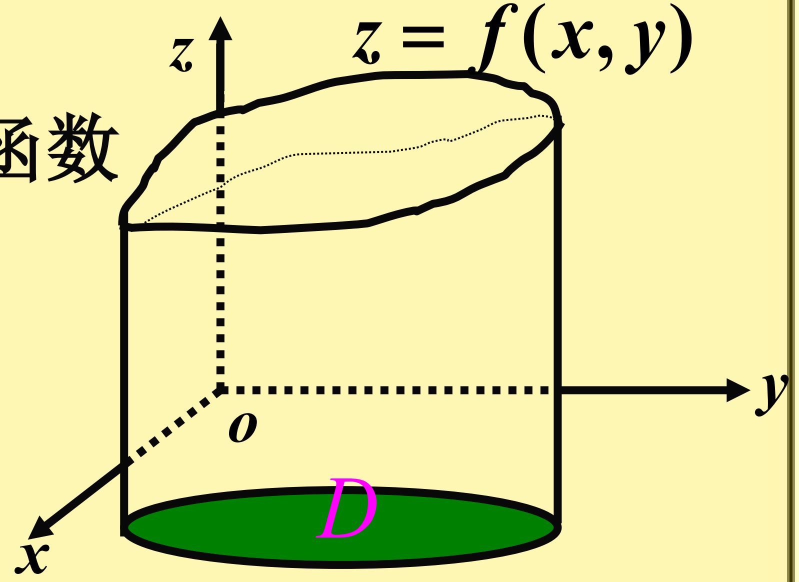
8.2.1 直角坐标系下二重积分的计算法

利用二重积分的定义直接计算二重积分一般很困难，计算二重积分的基本途径是将二重积分转化为累次积分，然后通过计算两次定积分来计算二重积分。

8.2.1 利用直角坐标计算二重积分

1、 曲顶柱体的体积------ 二重积分的几何意义

$z=f(x,y)$



定义在平面区域D上非负连续函数

底面：D

顶面： 曲面 $z=f(x,y)$

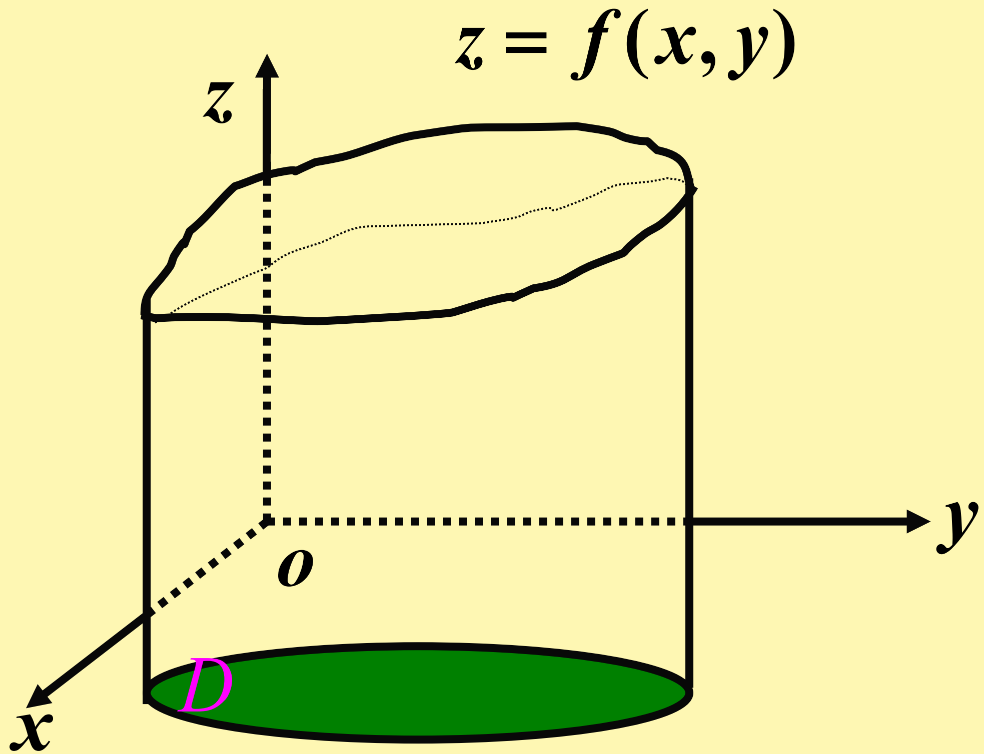
准线：D的边界曲线

侧面： 母线平行于z 轴的柱面

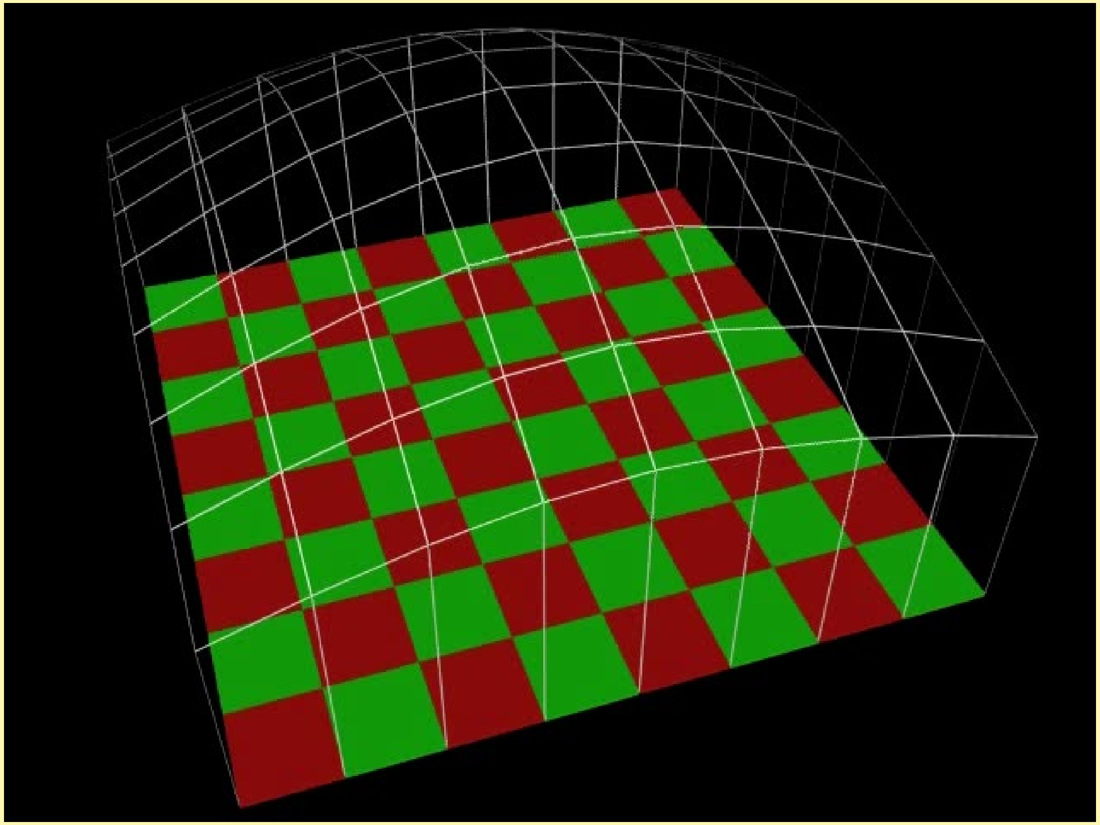
围成的立体称为曲顶柱体

如何求该曲顶柱体的体积呢？

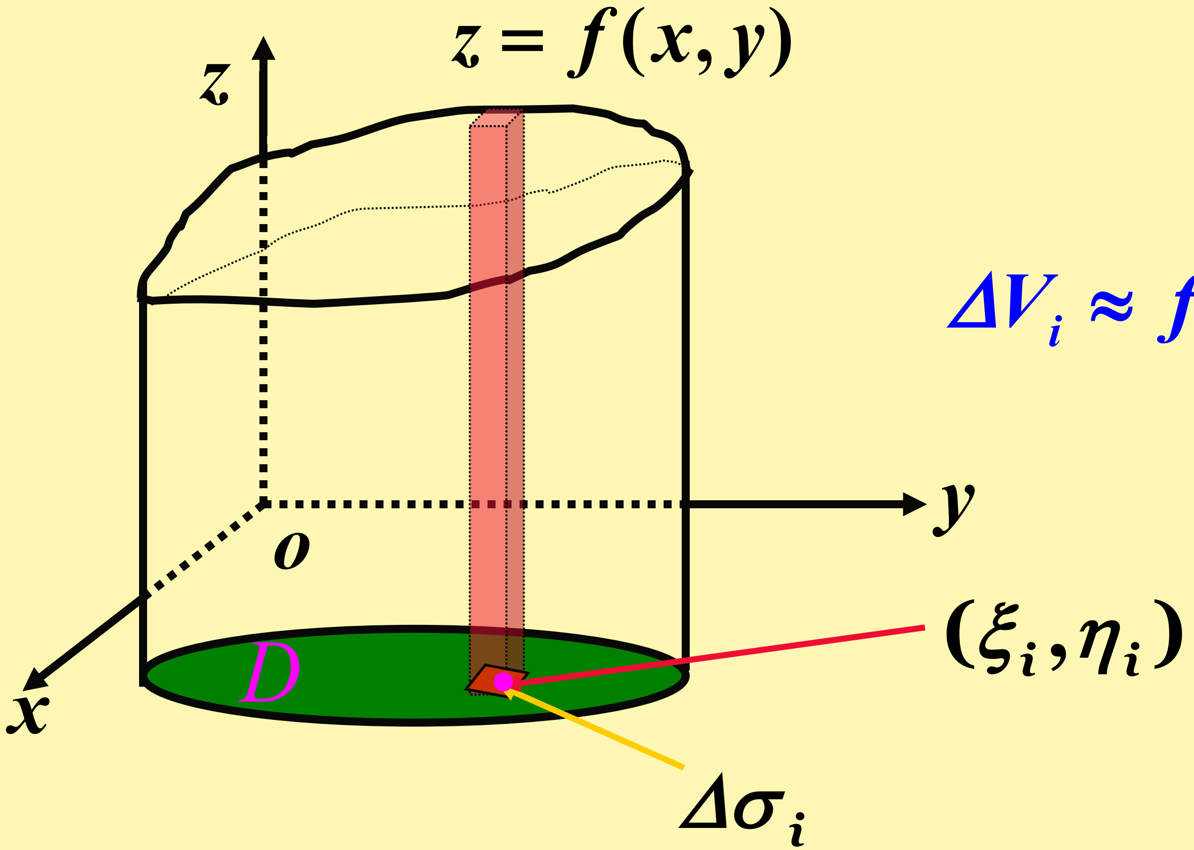
(1)分割　用一组曲线网将D分成n个小闭区域$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\ldots,\Delta\sigma_n$，分别以这些小区域的边界为准线作母线平行于$z$轴的柱面，这些柱面将原来的曲顶柱体分割成$n$个细曲顶柱体。



(2) 近似　当这些小区域的直径d_i很小时，由于$f(x,y)$连续，对于同一个小区域上的不同点，$f(x,y)$的变化很小，细曲顶柱体可近似地看作平顶柱体



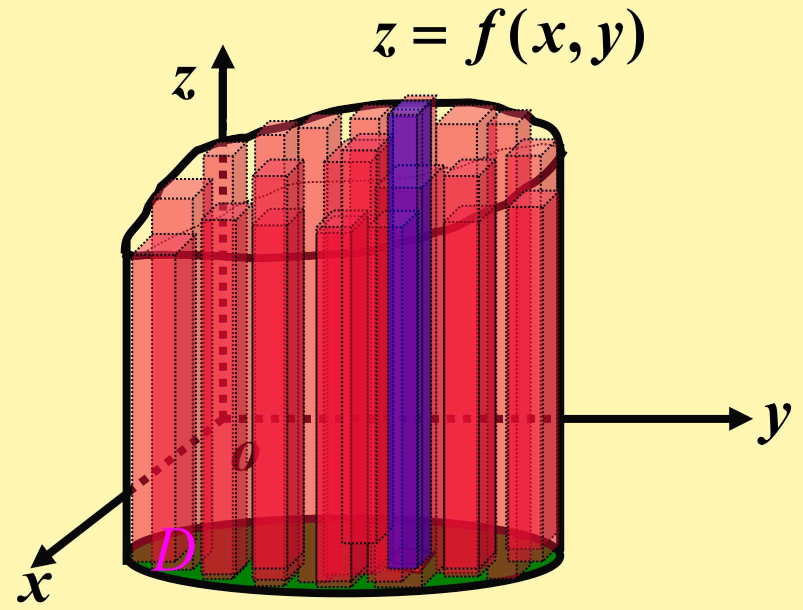
(2) 近似



$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

(3) 作和式

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



(4) 取极限

$$V \overset{\Delta}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

$$(\lambda = \max\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$$

由二重积分定义，得

曲顶柱体的体积 $V = \iint_D f(x,y)d\sigma$

这也是二重积分的几何意义。

例 1 利用二重积分的几何意义,说明等式

$$\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma=\frac{2\pi R^3}{3},$$

其中D是以原点为中心,半径为R的圆域.

解 积分$\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma$等于

在xoy面上以原点为中心,半径为R的圆域为底,

以R为半径的上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$为曲顶

的半球体的体积,即

$$\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{2\pi R^3}{3}。$$

2、用几何观点讨论二重积分的计算法

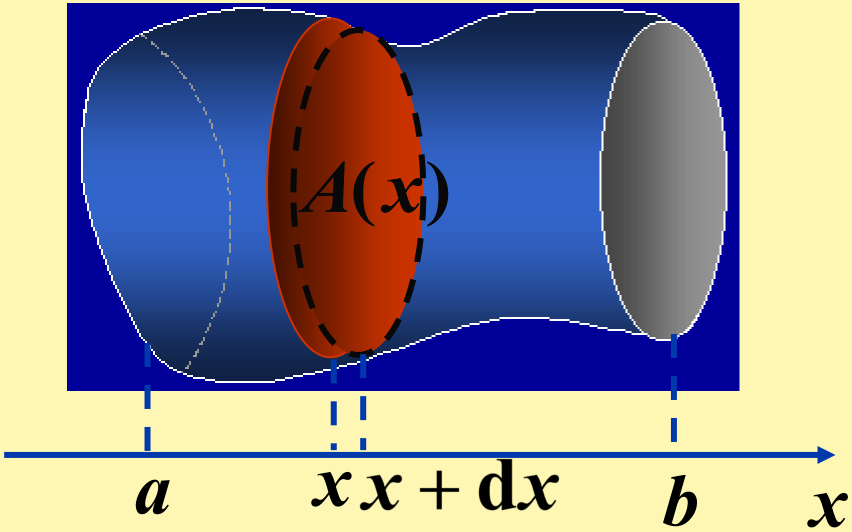
应用 “定积分” 中求 “平行截面面积为已知的立体的体积” 的方法计算这个曲顶柱体的体积。

设所给立体垂直于x 轴的截面面积为$A(x)$, $A(x)$在$[a,b]$上连续, 则对应于小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的体积元素为

$$\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$$

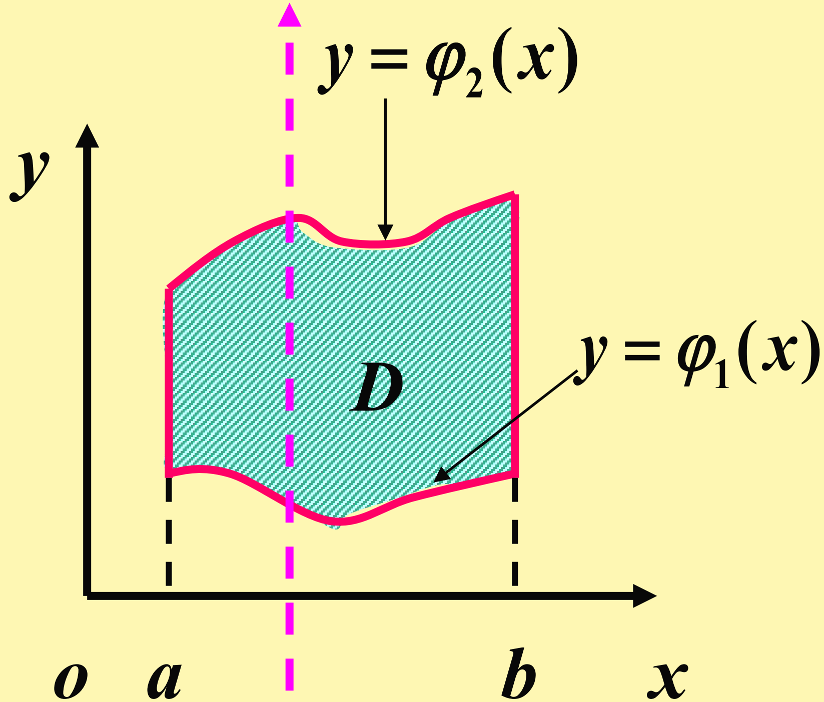
因此所求立体体积为

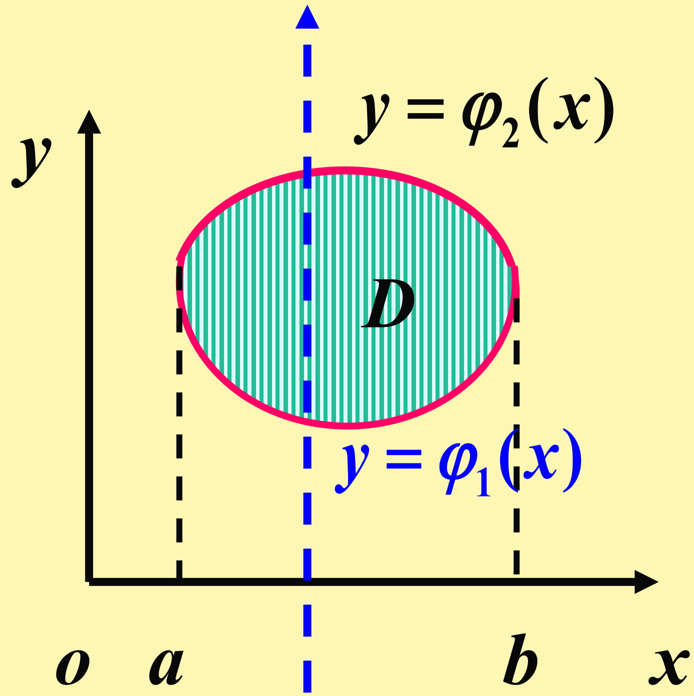
$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$



设$f(x,y) \geq 0$，$f(x,y)$在D上连续. 积分区域的类型：

(1) ［X—型］ $D: \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b$



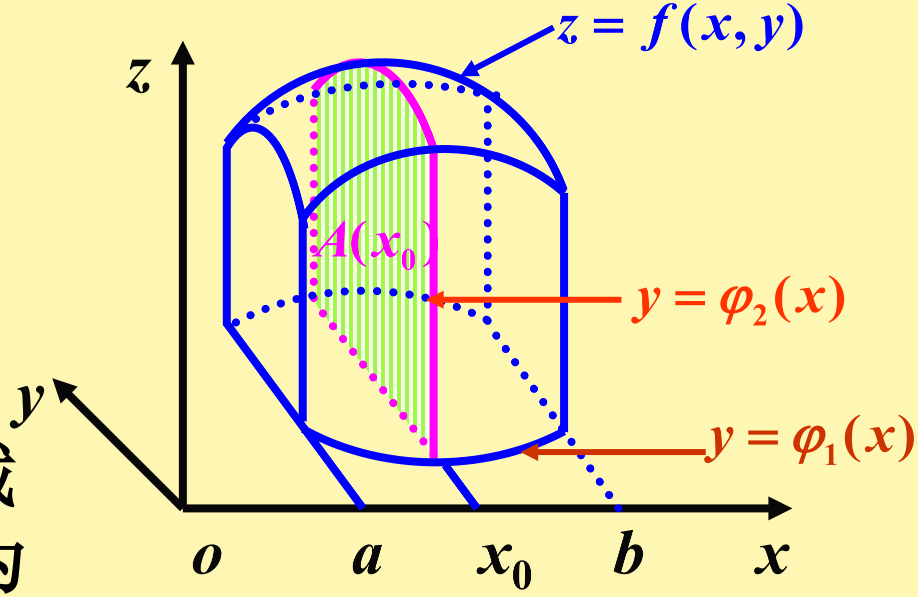


X型区域D的特点：穿过D内部且平行于y轴的直线与D的边界相交不多于两点

(2) ［Y—型］

先计算截面面积

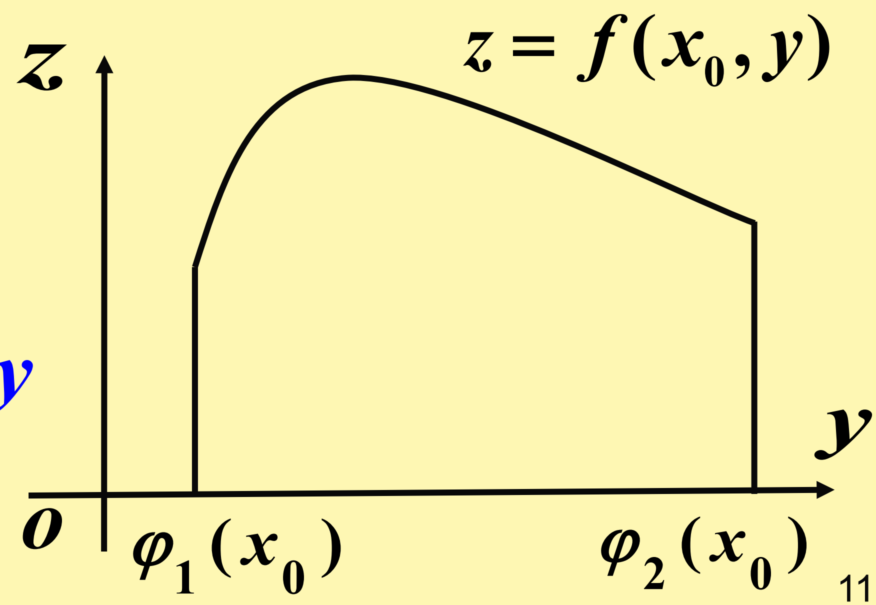
在区间$[a,b]$上任取一点x_0，作平行于yOz面的平面$x = x_0$



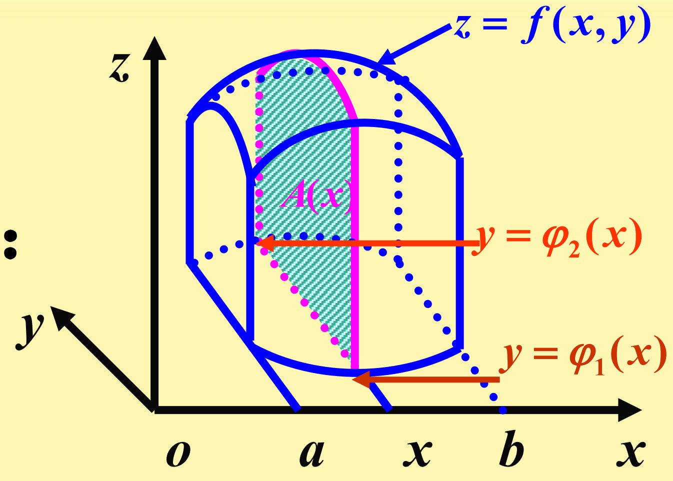
平面截曲顶柱体所得截面：以$[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$为底、曲线$z = f(x_0,y)$为曲边的曲边梯形

截面面积为：

$$A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)dy$$



一般地，过区间$[a,b]$上任一点x且平行于yOz面的平面截曲顶柱体所得截面面积为：



$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

曲顶柱体体积为

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

这个体积也就是所求二重积分的值，从而有等式

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx \qquad (1)$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx \qquad (1)$$

上式右端的积分叫做先对y、后对x的二次积分。

先把x看作常数，把 $f(x, y)$ 只看作y的函数，对y计算从$\varphi_1(x)$到$\varphi_2(x)$的定积分；

再把计算所得的结果$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ (是x的函数),对x计算在区间$[a,b]$上的定积分。

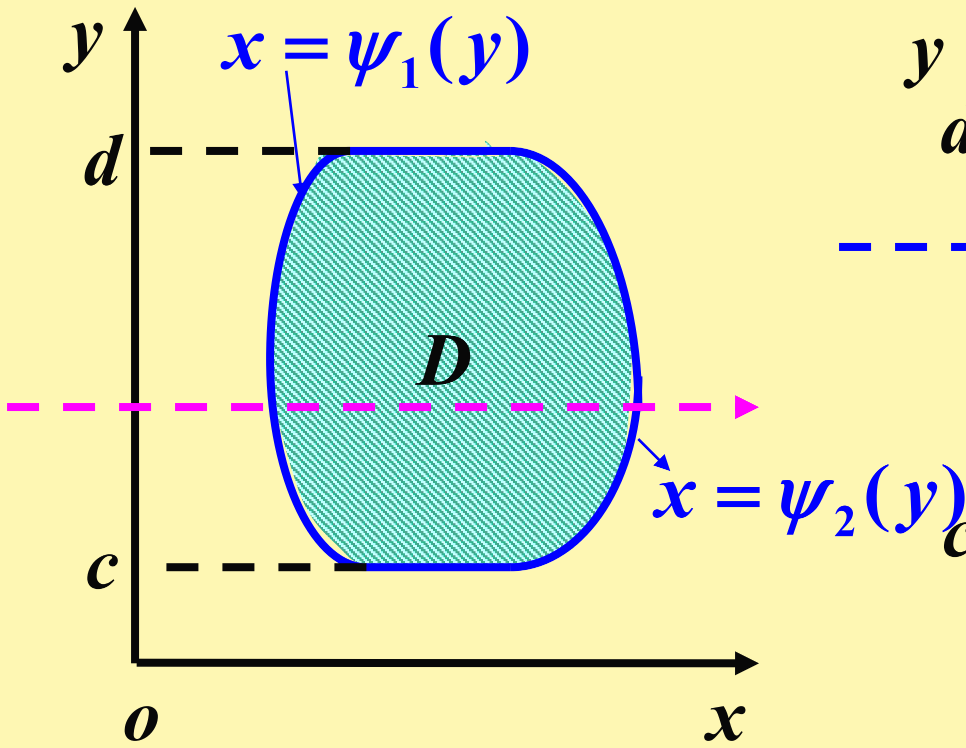
这个先对y、后对x的二次积分也常记作

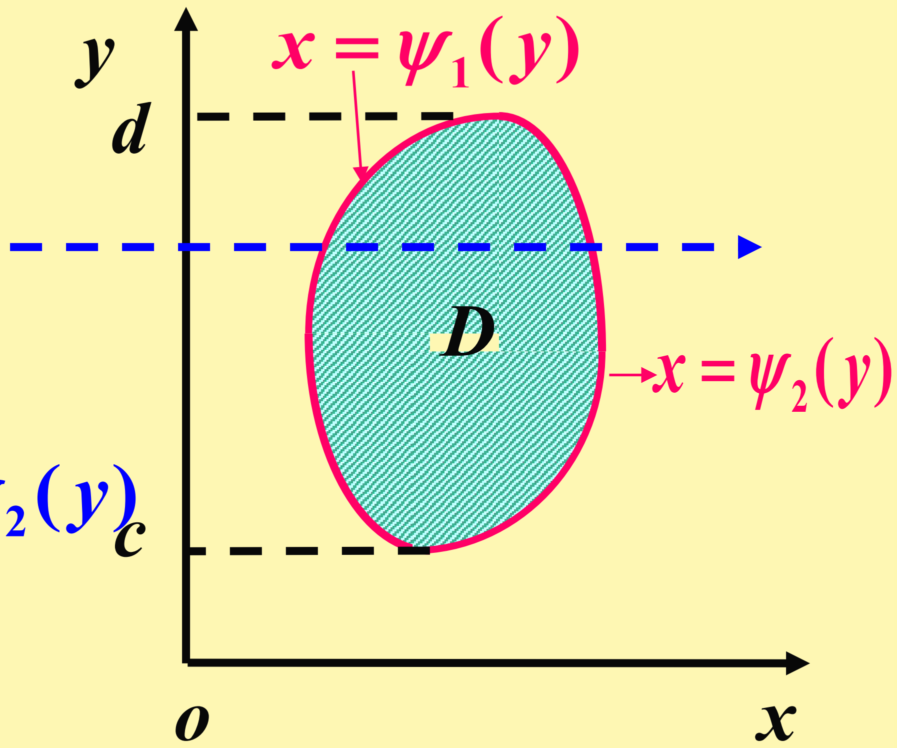
$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

即 $$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (1')$$ 。

(2) 如果积分区域D:

［Y—型］ $\psi_1(y)\le x\le \psi_2(y), c\le y\le d$





Y型区域D的特点：穿过D内部且平行于x轴的直线与D的边界相交不多于两点

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right]dy$$

$$= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (2)$$

把二重积分化为先对x、后对 y的二次积分的公式。

计算时先把y看作常数，因此 $f(x,y)$ 是x的一元函数，在区间$\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$上对$x$积分,得到一个关于$y$的函数,再在区间$c \le y \le d$上对$y$积分。

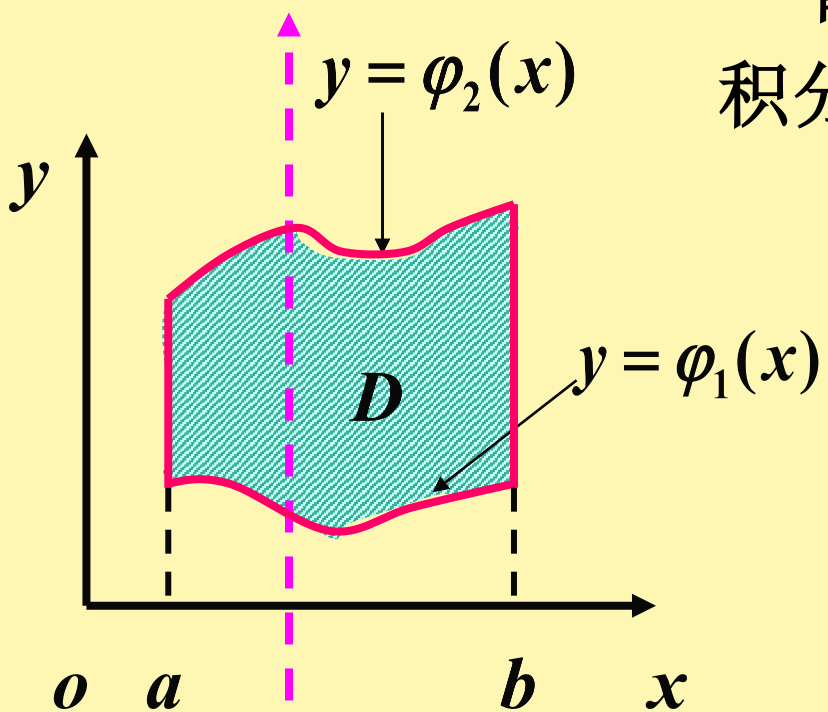
若函数$f(x,y)$ 在积分区域上不恒为正，公式（1）和（2）仍然成立。

我们也可以从二重积分和定积分的物理意义来理解上述公式.

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (1)$$

应用公式(1) 时，积分区域必须是X型区域。

X型区域D的特点：穿过D内部且平行于y轴的直线与D的边界相交不多于两点



箭头自下而上，y变化

积分下限:$\varphi_1(x)$，上限:$\varphi_2(x)$

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = A(x)$$

箭头自左而右移动，

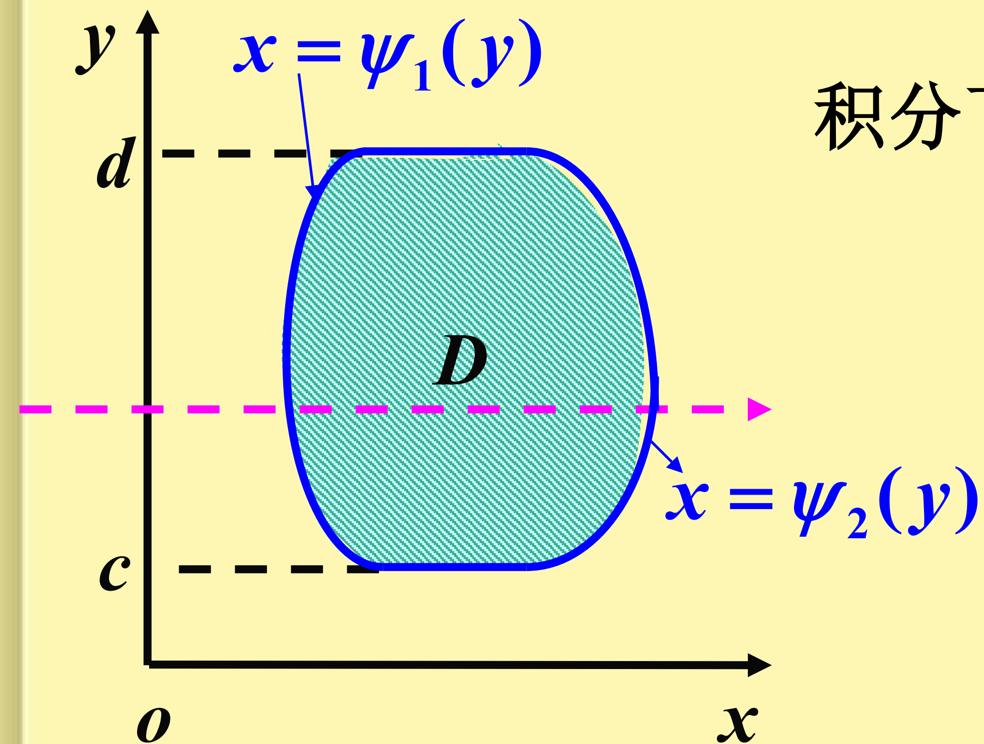
x变化范围:从a到b

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b A(x)dx$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (2)$$

应用公式(2) 时，积分区域必须是Y型区域

Y型区域D的特点：穿过D内部且平行于x轴的直线与D的边界相交不多于两点



箭头自左而右，x变化

积分下限:$\psi_1(y)$，上限:$\psi_2(y)$

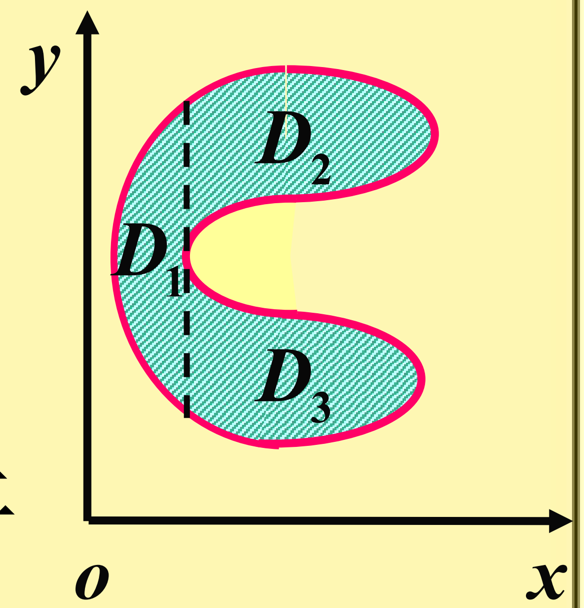
$$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx = A(y)$$

箭头自下而上移动，

y变化范围:从c到d

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d A(y)dy$$

若积分区域D既不是X型区域也不是Y型区域,此时要将积分区域D分成几部分,使得每一部分是X型区域或Y型区域,再利用积分关于区域的可加性可得整个区域上的积分。



$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_3} f(x,y)d\sigma$$

若积分区域D既是X型区域也是Y型区域，则:

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

此时，二次积分可以交换积分次序。

3 二重积分计算的一般方法

化为两次单积分

(1) 作图，确定*D*的类型。

(2) 选定积分顺序。

(3) 定出积分上下限。

(4) 计算定积分。

要依<u>被积函数</u>及<u>积分区域</u>两方面的情况选定积分顺序。

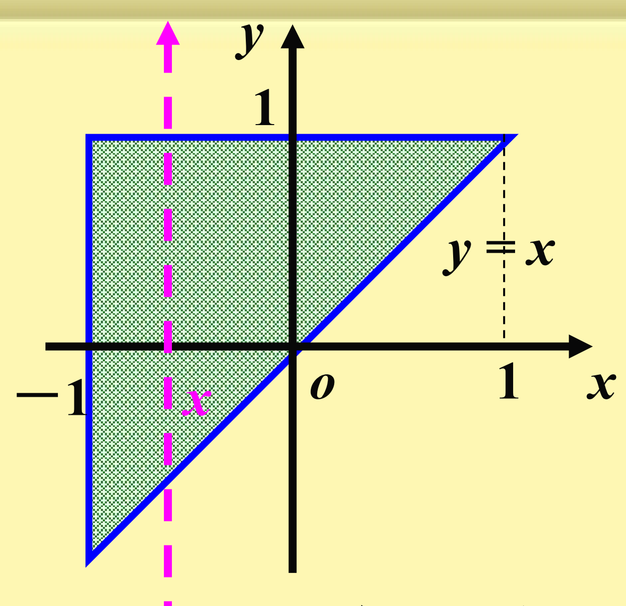
要使两次积分都能“积得出”，“易积出”。

X型区域：先积y;
Y型区域：先积x 。

确定积分顺序之后，积分的上下限是依*D*的特点而定的。

例1 计算$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,d\sigma$，

其中D是直线$y=x, x=-1$和$y=1$所围成的闭区域。



解 画出积分区域D如图所示。

既是X—型，又是Y—型的。先对y,再对x求积分

$$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,d\sigma = \int_{-1}^{1}\left[\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\,dy\right]dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\int_x^1 (1+x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1+x^2-y^2)\right]dx$$

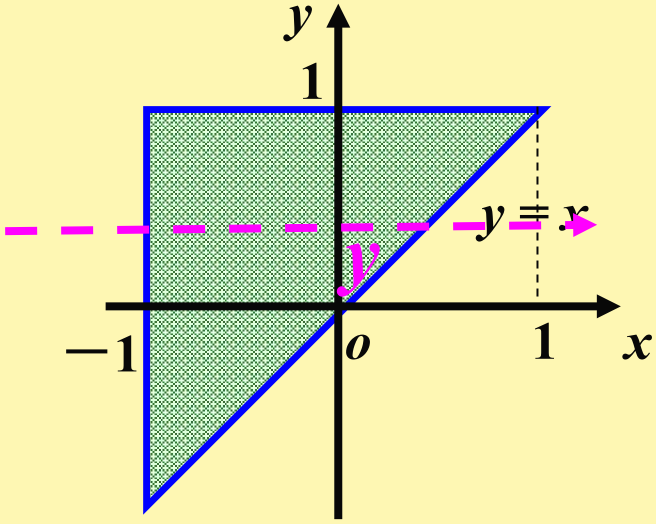
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\left[(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_x^1\,dx = -\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(|x|^3-1)\,dx$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^1 (x^3-1)\,dx = \frac{1}{2}。$$

例1 计算$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,d\sigma$,

其中D是直线$y=x, x=-1$和

$y=1$所围成的闭区域。



若先对x再对y求积分,则

$$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,d\sigma=\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{y} y\sqrt{1+x^2-y^2}\,dx\right]dy$$

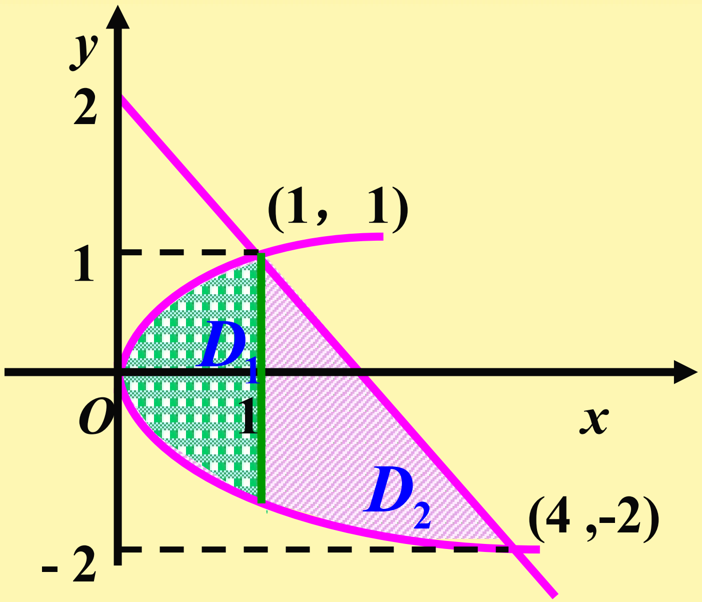
$$=\int_{-1}^{1} y\left[\int_{-1}^{y}\sqrt{1-y^2+x^2}\,dx\right]dy$$

$$=\cdots$$

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=?$$

例2 计算二重积分$\iint\limits_D xyd\sigma$，

D:由$y^2=x, y=2-x$ 所围区域。



解 画出积分区域D的图形

(1) 若先积y后积x，则有

$$D=D_1\cup D_2,$$

$$D_1:\begin{cases}-\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}\\ 0\le x\le 1\end{cases}, D_2:\begin{cases}-\sqrt{x}\le y\le 2-x\\ 1\le x\le 4\end{cases}。$$

$$\iint\limits_{D} xy\,d\sigma$$

$$= \iint\limits_{D_1} xy\,d\sigma + \iint\limits_{D_2} xy\,d\sigma$$

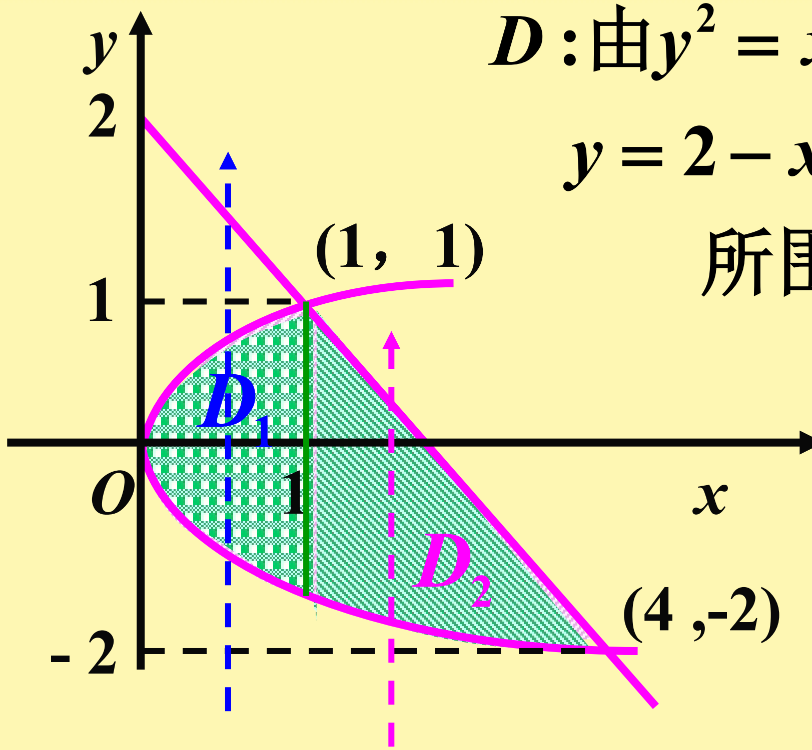
$$= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\,dy$$

$$+ \int_1^4 dx \int_{-\sqrt{x}}^{2-x} xy\,dy$$

$$= \int_0^1 0\,dx + \int_1^4 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{-\sqrt{x}}^{2-x} dx$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 4x)\,dx$$

$$= -\frac{45}{8}$$



D：由$y^2 = x$，$y = 2 - x$ 所围

$$D_1 : \begin{cases} -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases},$$

$$D_2 : \begin{cases} -\sqrt{x} \le y \le 2 - x \\ 1 \le x \le 4 \end{cases}。$$

例2 计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,d\sigma$ D:由 $y^2 = x$, $y = 2 - x$ 所围

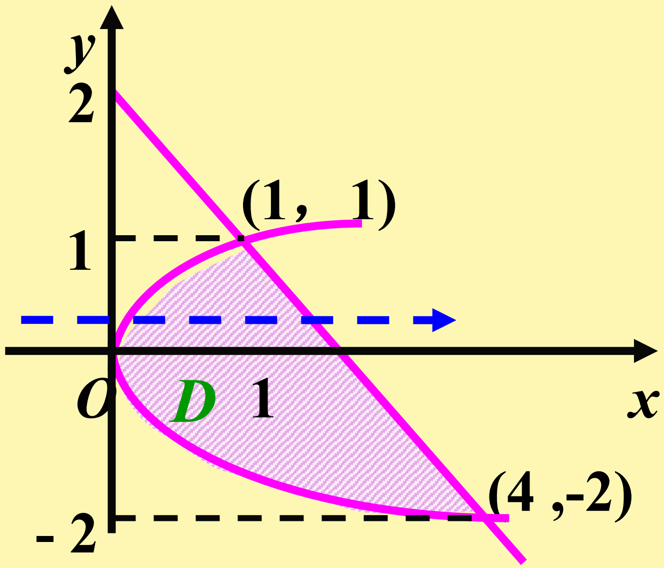
(2) 若先积 x 后积 y，则有

$$I = \int_{-2}^{1} dy \int_{y^2}^{2-y} xy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{1} \frac{y}{2}\left[(2-y)^2 - y^4\right] dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} [4y - 4y^2 + y^3 - y^5]dy$$

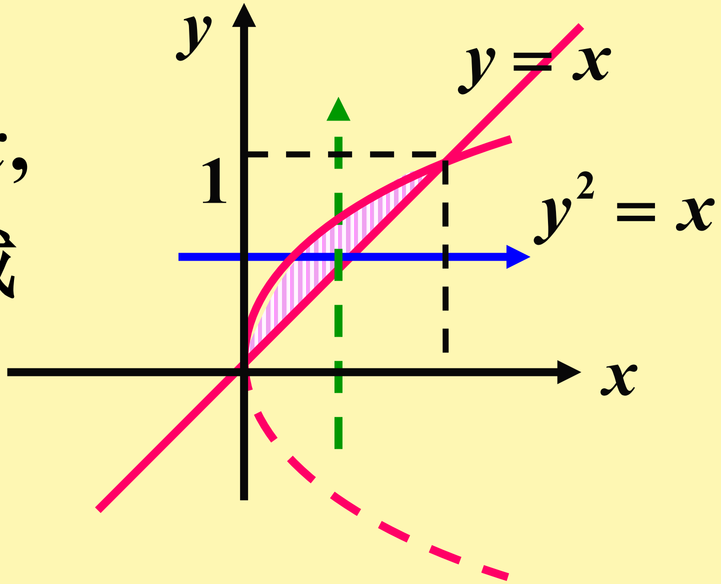
$$= \frac{1}{2}[2y^2 - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^4}{4} - \frac{y^6}{6}]_{-2}^{1} = -\frac{45}{8}。$$



在化二重积分为二次积分时，为了计算简便，需要选择恰当的二次积分的次序，这时既要考虑区域D的形状，又要考虑函数$f(x,y)$的特性。

例3 求二重积分

(1) $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y} d\sigma$, D: 由 $y = x$, $y^2 = x$ 所围的区域



解 积分区域如图所示:

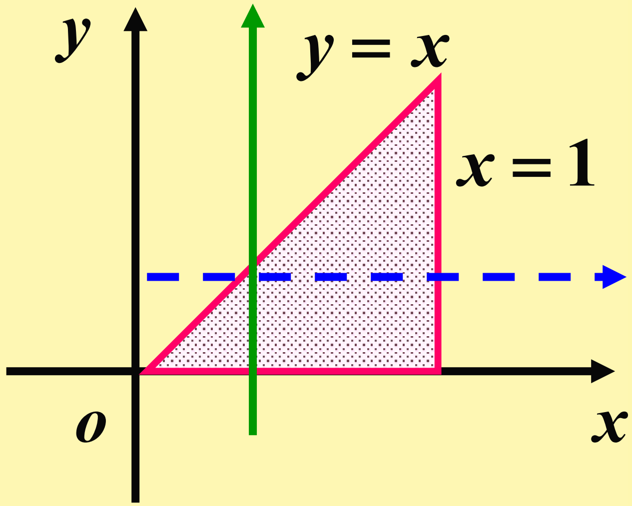
应先积x，后积y

$$I = \iint\limits_D \frac{\sin y}{y} d\sigma = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin y}{y}(y - y^2) dy = \int_0^1 \sin y dy - \int_0^1 y \sin y dy$$

$$= 1 - \cos 1 + y \cos y \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos y dy = 1 - \sin 1$$

(2) $\iint\limits_D e^{-x^2}d\sigma, D:$由$y=x, y=0, x=1$所围的区域



解 积分区域如图所示

应先积y，后积x

$$\iint\limits_D e^{-x^2}d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^x e^{-x^2}dy$$

$$= \int_0^1 e^{-x^2}\cdot x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

评注 本例中两题不能交换积分次序，因为有些函数的原函数不能用初等函数表达出来，从而二重积分计算不出来

计算 $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx$

4 交换积分顺序

①由所给的积分顺序及积分限写出D的不等式表示并画出积分区域的草图

②由积分区域按新的积分顺序确定积分限。

例4 交换积分的积分顺序

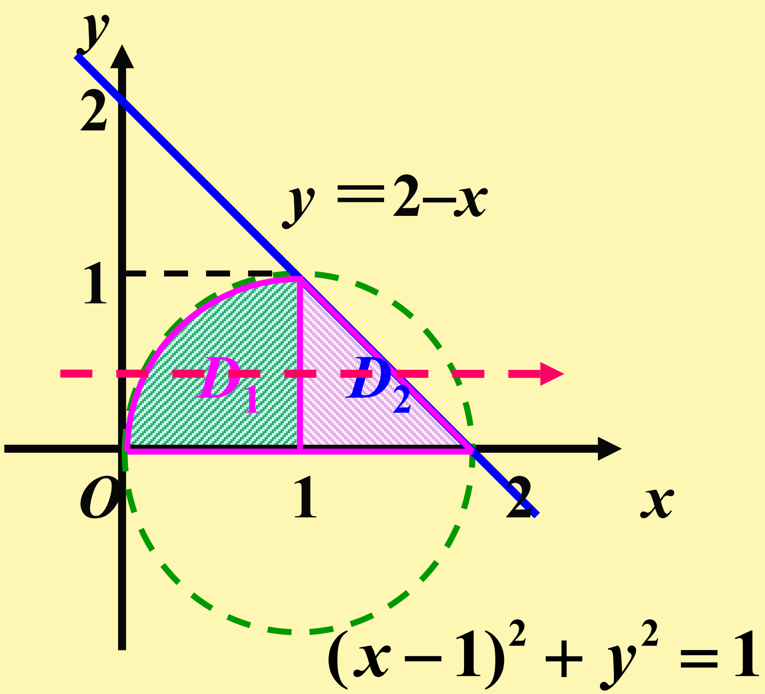
$$I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$$

解 $I=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$

$$D_1:\begin{cases}0\le y\le\sqrt{2x-x^2},\\ 0\le x\le 1,\end{cases}\quad D_2:\begin{cases}0\le y\le 2-x\\ 1\le x\le 2\end{cases}$$

$$D_1:\begin{cases}0\le y\le\sqrt{2x-x^2},\\ 0\le x\le 1,\end{cases}$$

$$D_2:\begin{cases}0\le y\le 2-x\\ 1\le x\le 2\end{cases}$$



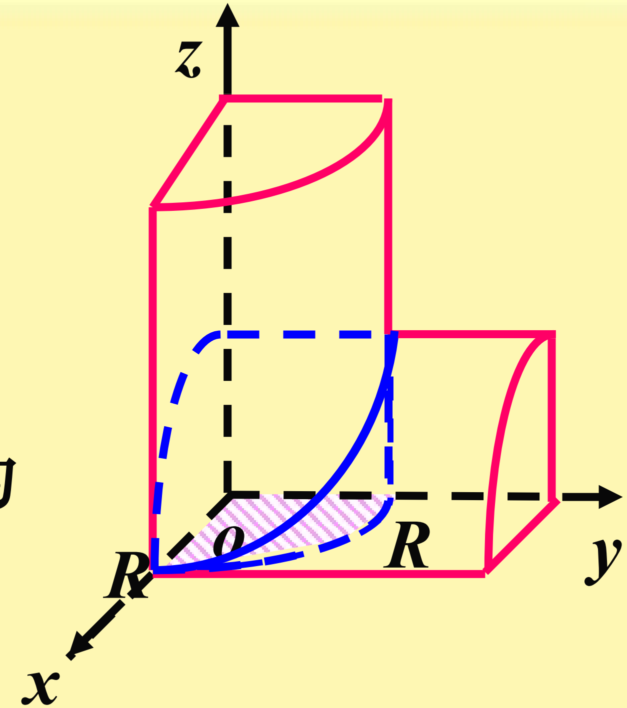
$$D=D_1\cup D_2$$

$$\Rightarrow D:\begin{cases}1-\sqrt{1-y^2}\le x\le 2-y\\ 0\le y\le 1\end{cases}$$

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$$

例5　求两个底圆半径都等于R的直交圆柱面所围成的立体体积。



解　设这两个圆柱面的方程分别为　$x^2+y^2=R^2$及$x^2+z^2=R^2$

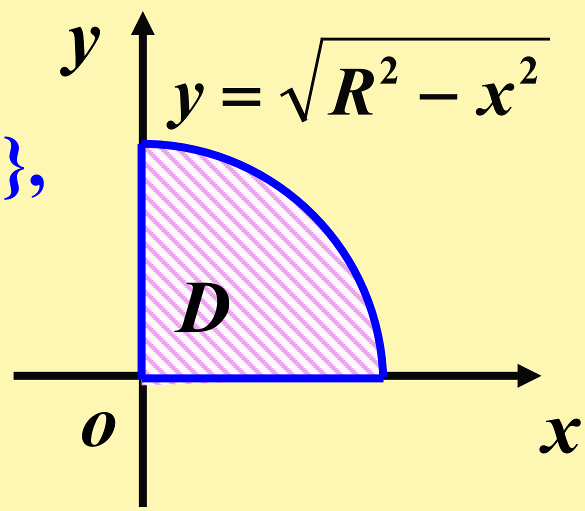
由对称性，所围成的立体体积为它在第一卦限部分的体积V_1的8倍

所求立体在第一卦限部分可以看成是一个曲顶柱体，它的底为

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{R^2-x^2},0\le x\le R\},$$

它的顶是柱面　$z=\sqrt{R^2-x^2}$,

于是 $V_1=\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2}\,d\sigma$



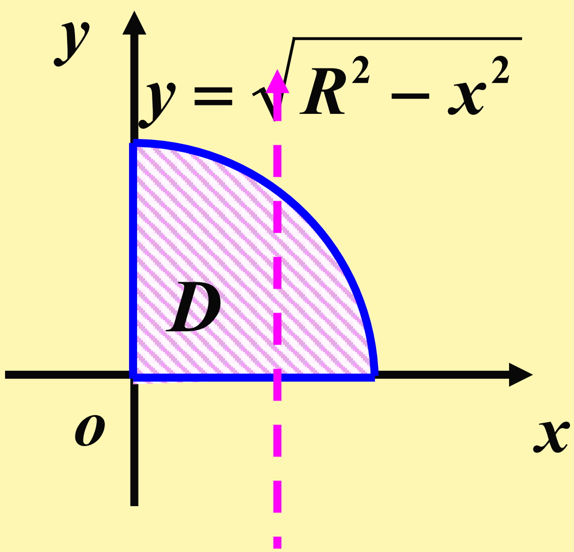
例5 求两个底圆半径都等于R的直交圆柱面所围成的立体体积。

$$V_1=\iint_D \sqrt{R^2-x^2}\,d\sigma=\int_0^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,dy\right]dx$$

$$=\int_0^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,d\,y\right]dx$$

$$=\int_0^R\left[\sqrt{R^2-x^2}\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}d\,y\right]dx$$

$$=\int_0^R(R^2-x^2)dx=\frac{2}{3}R^3$$



从而所求立体体积为

$$V=8V_1=\frac{16}{3}R^3。$$

内容小结

1、 会把二重积分化成直角坐标下的二次积分,会交换积分次序。

作业

同步练习册　　习题 8.2.1